

**UFPA**  
*II Semana de Pós-Graduação  
em Física*

Introdução a Teoria do Caos

CAP. II

Prof. Dr. Elinei Santos

Belém - 2007

## Sistemas dinâmicos

Tempo contínuo ou tempo discreto

-Tempo contínuo: t é um número real, regidos por equações diferenciais – mínimo três graus de liberdade para ocorrer caos.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -10(x-y) & \frac{dP}{dt} &= cPR - aP \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \quad r = 28.0 & \frac{dR}{dt} &= bR - dPR \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \frac{8}{3}z \end{aligned}$$

Introdução a teoria do caos

## Sistemas dinâmicos discretos

-Tempo discreto: tempo t é um número inteiro. Sistema governado por uma ou mais equações de diferenças (finitas).

**Mapa logístico**       $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

**Mapa de Henon**       $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n$   
 $y_{n+1} = bx_n$

**Mapa de Elinei**       $p_{n+1} = \frac{1}{(1+\gamma)} [p_n + \omega_n^2 \text{sen}(\theta_n) \cos(\theta_n) - K \text{sen}(\theta_n)]$   
 $\theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1}$   
 $\omega_{n+1} = \omega_n + c(\cos(\theta_n) - \cos(\theta_0)) \Delta t$

Introdução a teoria do caos

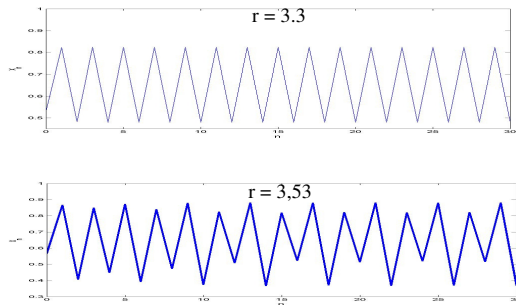
## Mapa logístico

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad x_n \in [0,1]$$

Este mapa pode ser pensado como uma idealização simples de um modelo ecológico para variação anual na população de um inseto

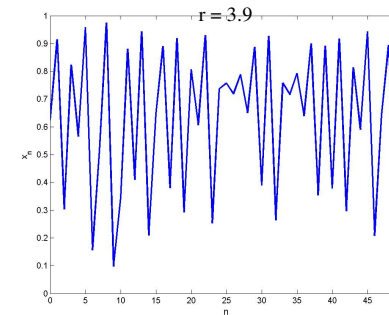
Introdução a teoria do caos

## Mapa logístico – órbitas período-2 e período-4



Introdução a teoria do caos

## Mapa logístico – órbita caótica



Introdução a teoria do caos

## Ponto fixo, sorvedouro e fonte Definições

-Ponto fixo do mapa  $f$ :  $f(p)=p$   
 -Seja  $f$  um mapa sobre  $\mathbb{R}$  e seja  $p$  um número real tal que  $f(p)=p$ . Se todos os pontos suficientemente próximos a  $p$  são atraídos para  $p$ , então  $p$  é chamado um **sumidouro** ou um **ponto fixo atraiante**. Se todos os pontos suficientemente próximos a  $p$  são repelidos de  $p$ , então  $p$  é **chamado de fonte** ou **ponto fixo repelente**.

*Teorema: Seja  $f$  um mapa (suave) sobre  $\mathbb{R}$  e assuma que  $p$  é um ponto fixo de  $f$ .*

1. Se  $|f'(p)| < 1$ , então  $p$  é um **sumidouro** ou **estável**
2. Se  $|f'(p)| > 1$ , então  $p$  é uma **fonte** ou **instável**
3. Se  $|f'(p)| = \pm 1$ , **nada se pode afirmar sobre  $p$**

## Determinação de ponto fixo e estabilidade

$$f(x) = 2x(1-x)$$

$$f(x) = x \quad \text{ponto fixo}$$

$$2x(1-x) = x$$

$$2x - 2x^2 = x$$

$$2x^2 - x = 0$$

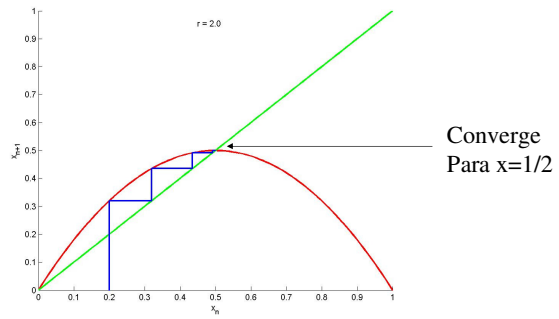
$$2x(x - 1/2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1/2 \end{cases} \quad \text{dois pontos fixos}$$

$$f'(x) = 2 - 4x$$

$$f'(0) = 2 > 1 \Rightarrow x = 0 \quad \text{fonte}$$

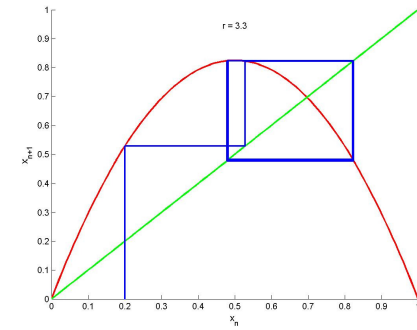
$$f'(1/2) = 0 < 1 \Rightarrow x = 1/2 \quad \text{sumidouro}$$

**Diagrama teia de aranha (cobweb plot)**  
 **$f(x)=2x(1-x)$**



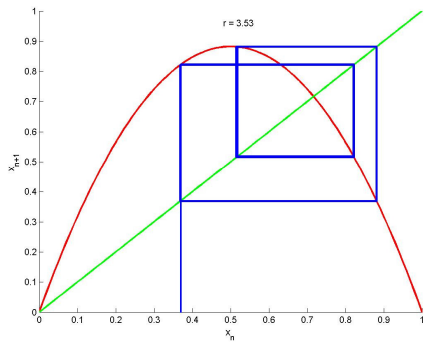
Introdução a teoria do Caos

**Mapa logístico: período-2**



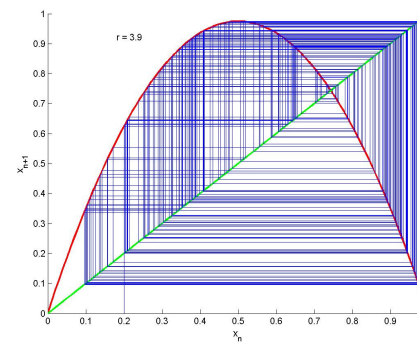
Introdução a teoria do Caos

**Mapa logístico: período-4**



Introdução a teoria do Caos

**Mapa logístico: órbita caótica**



Introdução a teoria do Caos

## Medindo Caos: expoente de Lyapunov

Considere que o sistema evolua a partir de condições iniciais muito próximas  $x$  e  $x+\Delta x$ , então após  $n$  iterações a divergência dessas órbitas será aproximadamente:

$$x \Rightarrow x + \Delta x$$

$$\Delta x(n) \approx \Delta x_0 e^{\lambda n}$$

$\lambda$  - Expoente de Lyapunov fornece a taxa de divergência das trajetórias.

$\lambda < 0$  - trajetórias convergem e o sistema não é caótico

$\lambda > 0$  - trajetórias divergem exponencialmente e o sistema é caótico (a evolução é sensível às condições iniciais).

Introdução a teoria do caos

## Expoente de Lyapunov – mapa unidimensional

Seja  $x_{n+1} = f(x_n)$  um mapa unidimensional

$$f^n(x + \Delta x) - f^n(x) \approx \Delta x e^{n\lambda}$$

$$\log \left[ \frac{f^n(x + \Delta x) - f^n(x)}{\Delta x} \right] \approx n\lambda$$

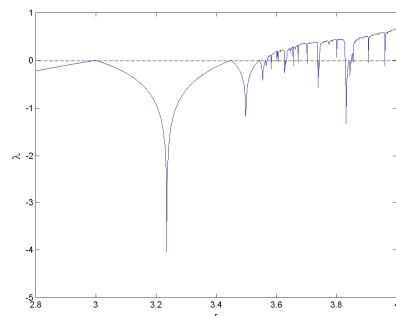
$$\lambda \approx \frac{1}{n} \log \left| \frac{df^n}{dx} \right|$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)|$$

Introdução a teoria do caos

## Expoente de Lyapunov – mapa logístico

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \quad x_n \in [0,1] \quad x'_{n+1} = r(1-2x_n)$$



Introdução a teoria do caos

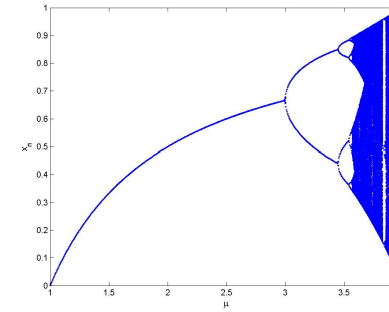
```
/*Lyaplog.cpp: Programa que calcula o Expoente de Lyapunov do mapa logístico-*/  
/*Ref: Quantifying Chaos, Jan Tobochnik and Harvey Gould, Computers in  
Physics, NOV/DEC 1989  
x(n+1)=x(n)r(1-x(x))  
Programador: Elinei Santos  
Data: 20/10/2007  
*/  
#include <stdio.h>  
#include <stdlib.h>  
#include <math.h>  
  
#define bmin 2.8 /*valor minimo de r*/  
#define bmax 4.0 /*valor maximo de r*/  
#define passo 0.001  
#define NPT 12000 /*numero de iteracoes*/  
#define TRAN 1000 /*transiente*/
```

```

void main()
{
  double my_lyap, der, NN;
  unsigned int i;
  FILE *fpout; /* grava dados em lyaplog.dat */
  if((fpout=fopen("lyaplog.dat","w"))==NULL)
  {
    printf("File %s can't be opened\n");
    exit(0);
  }
  for(m=bmin; m<= bmax; m+=passo)
  {
    y = 0.5;
    lyap=0.0;
    for (i=1; i<=NPT; i++)
    {
      /*mapa logístico*/
      y = m*y*(1-y);
      if (i>=TRAN)
      {
        der=m*(1-2*y); /*derivada do mapa*/
        lyap=lyap+log(fabs(der));
      }
    }
    NN=NPT-TRAN;
    lyap= lyap/NN;
    fprintf(fpout, "%4f %4f\n", m, lyap);
  }
  printf("dados armazenados em biflogi.dat\n");
  fclose (fpout);
}

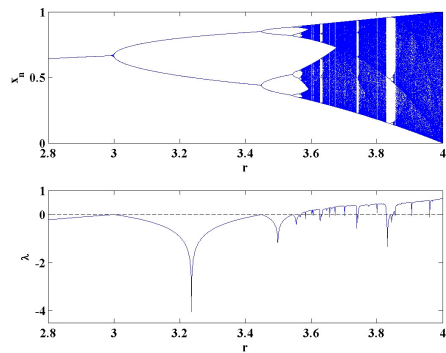
```

## Mapa logístico – diagrama de bifurcação



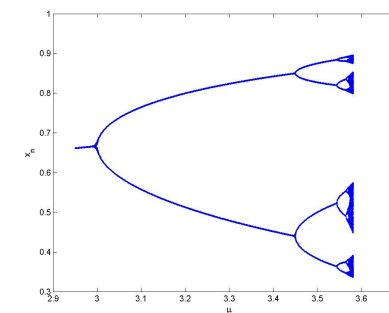
Introdução a teoria do caos

## Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov



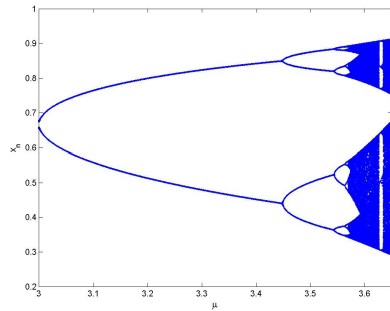
Introdução a teoria do caos

## Mapa logístico – diagrama de bifurcação



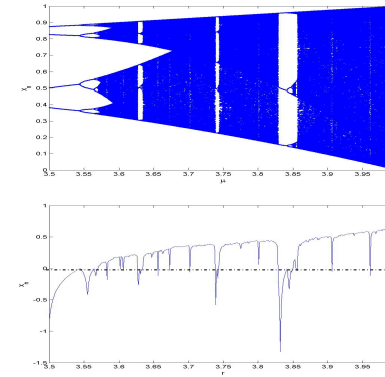
Introdução a teoria do caos

## Mapa logístico – diagrama de bifurcação



Introdução a teoria do caos

## Mapa logístico – bifurcação e Lyapunov

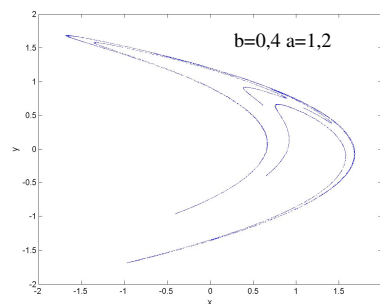


Introdução a teoria do caos

## Mapa bidimensional – Mapa de Hénon

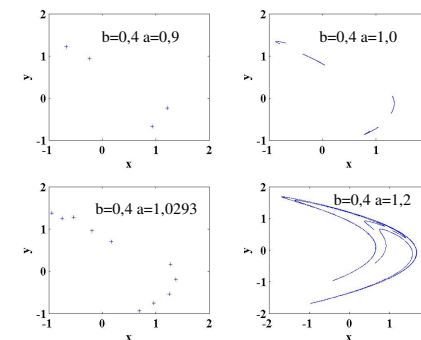
$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n$$

$$y_{n+1} = bx_n$$



Introdução a teoria do caos

## Mapa bidimensional – Mapa de Henon



Introdução a teoria do caos

## Bifurcações locais

Bifurcações (Poincaré, 1885), refere-se a mudança qualitativa no retrato de fases de um sistema dinâmico, conforme algum parâmetro do sistema passa por um valor crítico.

A Codimensão de uma bifurcação é o número de parâmetros cujos valores são variados a fim de produzir a bifurcação em questão.

Codimensão – 1  
Um único parâmetro-r

$$G(x, r) = f_r(x)$$

Introdução a teoria do caos

## Sistemas com codimensão 1

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

$$E_r(x) = r \sin(x)$$

$$Q_c(x) = x^2 + c$$

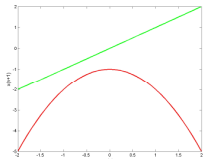
$$f_\mu(x) = \mu - x^2$$

I - Bifurcação Sela-nó, bifurcação tangente ou de dobra: mecanismo pelo qual um par de pontos de equilíbrio com estabilidades contrárias é criado ou destruído.

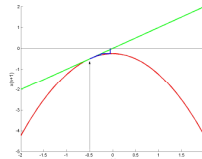
Introdução a teoria do caos

## Bifurcação sela-nó

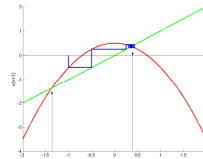
$$f_\mu(x) = \mu - x^2$$



$\mu = -1,0$  – nenhum ponto fixo



$\mu = -0,25$  – um ponto fixo



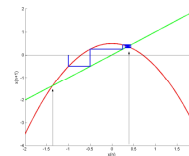
$\mu = 0,5$  – dois pontos fixos

Introdução a teoria do caos

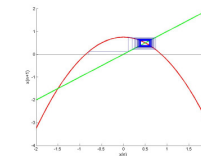
## Bifurcação dobramento de período

Bifurcação em que um ponto fixo estável gera dois pontos fixos estáveis dobrando o período

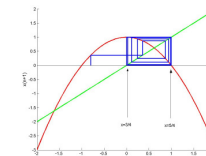
$$f_\mu(x) = \mu - x^2$$



$\mu = 0,5$  – um ponto fixo



$\mu = 0,75$  – ainda há atração

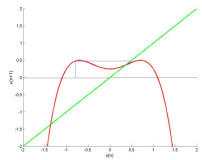


$\mu = 1,0$  – período 2

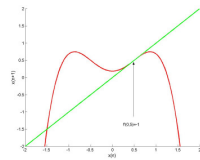
Introdução a teoria do caos

## Bifurcação dobramento de período

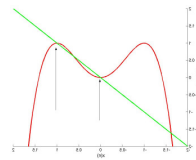
$$f^2_{\mu}(x) = f(\mu - x^2)$$



$\mu=0,5$  – um ponto fixo atraente



$\mu=0,75$  – tangencia



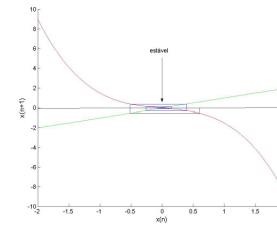
$\mu=1,0$  – dobramento de período

Introdução a teoria do caos

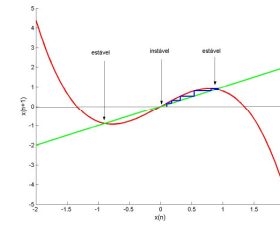
## Bifurcação forquilha

Sistemas com simetria. Um par de pontos de equilíbrio de mesma estabilidade. Pode aparecer ou desaparecer simultaneamente.

$$f_{\mu}(x) = \mu x - x^3$$



$\mu=-0,5$  – um ponto fixo atraente



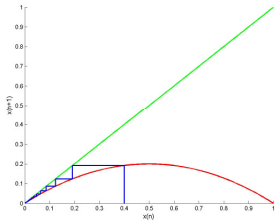
$\mu=1,8$  – perda de estabilidade e surgimento de dois pontos atraentes

Introdução a teoria do caos

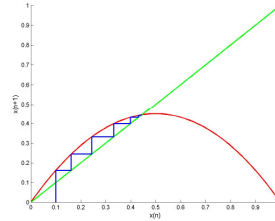
## Bifurcação transcritical

Troca de estabilidade de pontos fixos

$$f_{\mu}(x) = \mu x(1-x^2)$$



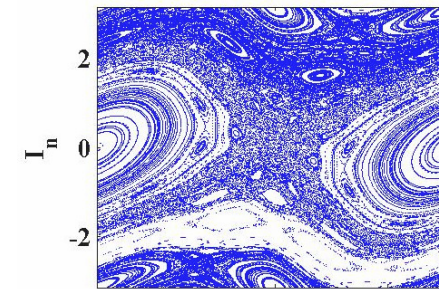
$\mu=0,8$   $x=0$  é um ponto fixo atraente (estável)



$\mu=1,8$   $x=0$  perde a estabilidade e surge  $x=0,5$  estável

Introdução a teoria do caos

## Mapa Padrão –caos Hamiltoniano



$$I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta_n)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}$$

Introdução a teoria do caos



**Mapa Padrão – a partir de rotor forçado**

$$H = \frac{I^2}{2M} + K \cos(\theta) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT) = \frac{2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right)$$

$$H = \frac{I^2}{2M} + \frac{K}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos\left(\theta - \frac{2\pi mt}{T}\right)$$

O efeito dos choques deltas é colocar o rotor em um número infinito de ondas de potencial cosseno, cada uma viajando a diferentes velocidades. Todas as ondas tem a mesma amplitude.

Introdução a teoria do caos

**Mapa Padrão – a partir de rotor forçado**

Equações de Hamilton do rotor

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I}$$

$$\frac{dI}{dt} = K \sin(\theta) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{I}{M}$$

Introdução a teoria do caos

**Mapa Padrão – a partir de rotor forçado**

Choques nos tempos  $t = nT$ . Entre os choques nenhuma força age sobre o rotor,  $I$ -cte e  $\theta$  varia linearmente no tempo. Vamos integrar o sistema entre dois choques um em  $nT$  e outro em  $(n+1)T$ .

Introdução a teoria do caos

**Mapa Padrão – a partir de rotor forçado**

$$I_{n+1} - I_n = \int_{(nT)^-}^{((n+1)T)^-} \frac{dI}{dt} dt$$

$$= \int_{(nT)^-}^{((n+1)T)^-} dt K \sin(\theta) \delta(t - nT) = K \sin(\theta_n)$$

$$\theta_{n+1} - \theta_n = \int_{(nT)^-}^{((n+1)T)^-} dt \frac{d\theta}{dt} = \int_{(nT)^-}^{((n+1)T)^-} dt \frac{dI_{n+1} T}{M} = \frac{I_{n+1} T}{M}$$

$$M = 1; \quad T = 1$$

$$I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta_n) \pmod{2\pi}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \pmod{2\pi}$$

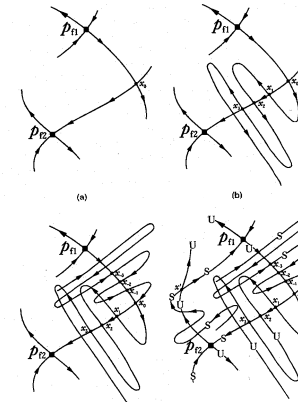
Introdução a teoria do caos

**Mapa Padrão – bifurcações homo-  
heteroclínicas**



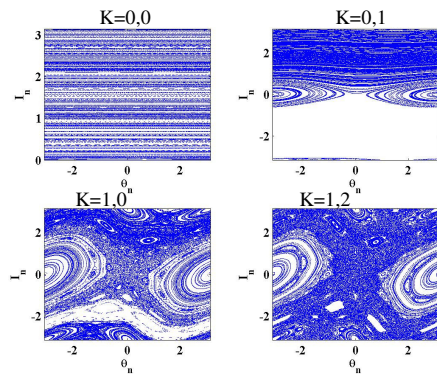
Introdução a teoria do caos

**Bifurcações homo-heteroclínicas**



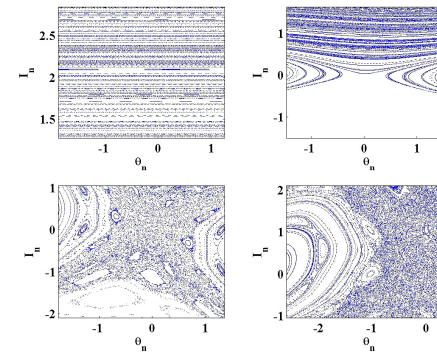
Introdução a teoria do caos

**Mapa Padrão**



Introdução a teoria do caos

**Mapa Padrão**



Introdução a teoria do caos

## Bibliografia

---

1. Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, New Yorke, 1993.
2. Kathleen T. Alligood, Tim Sauer, J. Yorke. *Chaos-An Introduction To Dynamical Systems*. Springer Verlag, New Yorke, 1997.
3. Luiz Henrique Alves Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. Livraria da Física, São Paulo, 2006.
4. J. Guckenheimer e P. Holmes. *Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 1983.
5. Morris W. Hirsch, Stephen Smale e Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*, 2 Ed. Elsevier Academic Press, New York, 2004.

---

Introdução a teoria do caos