

II Semana de Pós-Graduação em Física da UFPA

Introdução à Teoria do Caos

I – Introdução: Modelos Motivadores

Prof. Dr. Elinei Pinto dos Santos
Faculdade de Física da UFPA-Belém,
Programa de Pós-Graduação em Física

Sistemas Lineares e não-lineares

A previsão do tempo é uma das tarefas humanas mais desafiadora e essencial para a sobrevivência do homem. Desde a antiguidade a humanidade busca um meio de prever como será o tempo atmosférico. Seja para prever dias bons de plantio ou colheita, seja para vislumbrar um dia bom para se divertir ou viajar. Adivinhos, pajés e curandeiros buscavam na suposta ligação com deuses e outras forças do universo uma tentativa de fazer previsões do tempo para a próxima estação ou até mesmo para o dia de amanhã. Seja a previsão de horas, dias ou meses a dificuldade desta tarefa é a mesma. O que diferencia a dinâmica do clima que torna sua previsibilidade quase impossível? Afinal as leis físicas que regem esta dinâmica não são a mesma que permite acompanhar os movimentos dos planetas e o lançamento de uma nave espacial? A resposta é sim, porém, a intricada maneira que os diferentes componentes do clima se interligam é que se dá de forma diferente ou de forma não linear e aí uma gama de novos fenômenos e comportamentos surgem criando uma nova área conhecida como dinâmica não linear.

Existem dois tipos de fenômenos na natureza, os lineares e os não-lineares. Nos processos lineares uma perturbação que se faz no mesmo provoca nas suas variáveis perturbações proporcionais a perturbação. Além disso, para duas perturbações distintas que seja aplicada ao sistema ao mesmo tempo este reage como se cada perturbação fosse aplicada independentemente uma da outra de tal forma que a reação resultante do sistema se dá pela soma das reações individuais de cada perturbação. Isto pode ser traduzido da seguinte forma: seja uma perturbação P1 aplicada a um sistema linear que responde com reação R1 e com uma perturbação P2 responde com reação R2. Se aplicarmos uma perturbação kP1 ele responderá com uma reação kR1. E para as perturbações kP1 e wP2 aplicadas ao mesmo tempo ao sistema teremos uma reação kR1 + wR2.

Nos sistemas não lineares as duas propriedades acima não ocorrem. Nestes sistemas as perturbações aplicadas não geram reações proporcionais, ou seja, uma pequena perturbação pode resultar em uma grande reação ou vice-versa. Além disso, perturbações distintas aplicadas ao sistema não geram reações aditivas, mas resultados totalmente inesperados e imprevisíveis.

Seja sistema que descreve o oscilador harmônico amortecido (reescrito com duas equações de primeira ordem):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1\end{aligned}$$

Este sistema é LINEAR, porque todos os x 's do lado direito aparecem somente como potência de primeira ordem. De outro modo o sistema seria NÃO LINEAR. **Em geral termos não lineares são produtos, potências, funções de x , tais como x_1x_2 , $(x_1)^3$ ou $\sin(x_1)$, $\cos(x_2)$.**

Por exemplo, a equação que governa o pêndulo simples sem aproximação é escrita como uma equação diferencial de segunda ordem não linear pela presença da função seno:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \text{sen}(\theta) = 0.$$

A não linearidade torna a equação do pêndulo simples muito difícil de resolver analiticamente. A maneira usual é linearizar esta equação, considerando que as oscilações do pêndulo são pequenas de forma que $(\theta \ll 1)$ e, portanto $\text{sen}(\theta) \cong \theta$. Dessa forma converte-se um problema não linear para um problema linear com solução analítica. Porém, com esta abordagem nós estamos restringindo a física do problema, tendo uma visão parcial do fenômeno.

Caos Determinístico

Chamamos de caos determinístico a dinâmica complexa gerada por sistemas dinâmicos não lineares. O CAOS é gerado por regras fixas e determinísticas e não envolvem qualquer elemento de chance ou apresentam um gerador explícito de randomicidade. Em princípio, o futuro é completamente determinado pelo passado, porém, na prática, pequenas incertezas (presente em qualquer mensuração) são amplificadas e crescem exponencialmente com o tempo. Dessa forma, o comportamento dinâmico do sistema é previsível em um curto lapso de tempo, porém, imprevisível em longos intervalos de tempo.

Vamos exemplificar agora as propriedades referidas anteriormente usando alguns modelos não lineares que apresentam caos determinístico: um modelo matemático-biológico desenvolvido por Lotka-Volterra, conhecido como modelo predador-presa, o modelo do pêndulo simples forçado, um modelo de um circuito eletro-eletrônico conhecido como circuito de Matsumoto-Chua e o modelo que veio a partir da simulação de previsão do tempo, conhecido como Modelo de Lorenz.

O Modelo Predador-Presa

Imaginemos que temos em um tanque de água tucunarés (P-predadores) e sardinhas (R-presa) com ração suficiente para todas as sardinhas. Para as duas espécies, se somente o número delas aumentasse (crescimento Maltusiano) representaríamos matematicamente esse crescimento como:

$dP/dt = c TS$ – taxa de crescimento no tempo do Tucunaré por encontro com sua presa.

$dS/dt = b S$ – taxa de crescimento no tempo da Sardinha.

Porém o crescimento Maltusiano linear não ocorre na natureza, há sempre um controle que não deixa uma espécie crescer indefinidamente, seja por escassez de alimento, seja por morte natural ou mesmo predação como neste caso para a sardinha. Neste modelo, para simplificar, vamos levar em consideração uma regulação desde

crescimento (ou decrescimento) somente a interação ou encontro entre as duas espécies e a morte natural da presa. Toda vez que o Tucunaré encontra uma sardinha sua taxa de crescimento aumenta e ao mesmo tempo a taxa da sardinha diminui, isto pode ser representado matematicamente da seguinte forma:

$dP/dt = c PR - aP$ – o termo positivo representa a taxa de crescimento do Tucunaré por encontro com as sardinhas menos a taxa por morte natural.

$dR/dt = b R - dPR$ – o termo de menos representa a taxa de decrescimento da Sardinha por todo encontro com o Tucunaré. Não se considera a morte natural.

Note que este sistema é acoplado, um depende do outro, matematicamente temos que resolver estas equações simultaneamente. Fazemos facilmente isto usando um computador e um programa de integração numérica e colocamos abaixo em gráfico a evolução deste sistema no tempo.

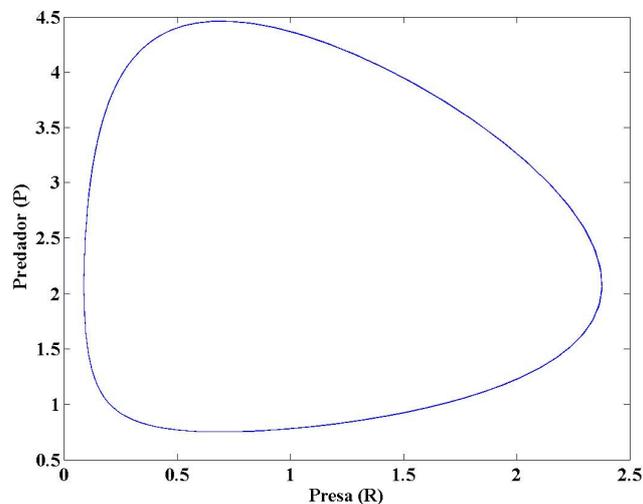


Fig.1 - Ciclo limite gerado pelo Modelo Predador-Presa. A quantidade de Predador-Presa é regulada pela interação entre as espécies.

Analisemos este resultado. Se acompanharmos na horizontal o crescimento da presa, verificamos que o número de predadores cresce conjuntamente até que o número de presa começa a diminuir, pois um grande número de predadores consome maior número de presas. O crescimento do número de predadores tem um limite de crescimento ditado pelo número de presas, quando esta última se torna mais escassa o número de predadores deve diminuir para suportar a quantidade de predadores com condições de sobrevivência. Assim o número de predadores diminui permitindo que o número de presa volte a crescer, gerando um ciclo que se repete, representado pelo ciclo limite mostrado neste gráfico. Este ciclo limite nós chamamos de **atrator do sistema**, ou seja, não importa o número de predadores e presas iniciais que usamos nas nossas integrações chegaremos a gráfico semelhante, maior ou menor, mas com o mesmo comportamento. Ele reflete a dinâmica deste sistema – um comportamento cíclico auto-regulado pela interação entre as duas espécies.

Imaginemos agora que em nosso tanque haja uma ligação com um rio e que a cada estação um fluxo de cardume de sardinhas invada o tanque. Matematicamente podemos simular esta invasão sazonal de presas como uma função senoidal do tipo $A \sin(2\pi/T t)$. Onde T é o período em que ocorre a invasão no tanque (uma semana, mês, seis meses, ano, etc). Nossas novas equações que simulam a interação com esta nova entrada de presa sazonal seria então:

$$dP/dt = c PR - aP$$

$$dR/dt = b R - dPR + A \text{Sen}(2\pi/T t).$$

O termo em seno, que representa a entrada sazonal de presas, transforma o sistema inicial que era periódico em um sistema não linear caótico. O que isto implica? Primeiro que não há uma solução analítica simples para este sistema, ele só pode ser resolvido numericamente. Segundo, que diferentes condições iniciais geram comportamentos totalmente diferentes e até mesmo imprevisível. Fazendo isto obtemos a seguinte solução numérica colocada em gráfico na Figura 2:

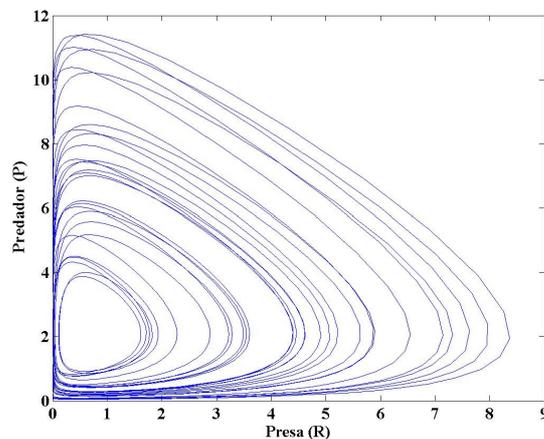
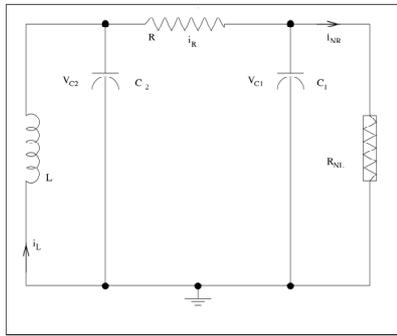


Fig.2 – Atrator caótico para o modelo Predador-Presa com variação sazonal periódica.

Compare este gráfico com o anterior, embora a forma do ciclo limite se mantenha, percebemos que perdemos o comportamento cíclico que se repete. A dinâmica se torna mais rica, podendo o sistema passar de um grande número de predadores e presas num ciclo e logo no outro diminuir assustadoramente. Há uma imprevisibilidade no comportamento do sistema. Este comportamento errático expresso no gráfico gera um atrator diferente do ciclo limite, conhecido como **atrator estranho** e neste caso **caótico por possuir imprevisibilidade e dependência das condições iniciais** que se usa para integrar o sistema.

Duas outras propriedades dos sistemas não lineares é que eles podem apresentar diferentes comportamentos para diferentes parâmetros do sistema, gerando atratores distintos. Pode ainda apresentar para um mesmo conjunto de parâmetros e diferentes condições iniciais um comportamento de forma diferente o que dizemos que ele possui coexistência de atratores, uma vez que cada atrator, como vimos, representa um comportamento particular do sistema. Vamos exemplificar este comportamento com um sistema elétrico-eletrônico usado em nosso trabalho de tese de doutoramento conhecido como Modelo de Matsumoto-Chua.

O Modelo de Matsumoto-Chua



$$C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = g(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}),$$

$$C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L,$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -V_{C_2},$$

$$i_{NR}(V_{C_1}) = m_0 V_{C_1} + 0,5(m_1 - m_0) + (|V_{C_1} + B_p|) + (|V_{C_1} - B_p|).$$

Fig.3 - Circuito de Matsumoto-Chua e suas equações.

O circuito elétrico de Matsumoto-Chua (Figura 3) é um sistema não linear que apresenta comportamento caótico com coexistência de atratores. As variáveis dinâmicas deste sistema são tensões elétricas e correntes que passam no circuito. Para um conjunto de variáveis do circuito temos dois tipos de atratores caóticos gerados. Um com coexistência de atratores conhecido como atrator tipo Dupla Espiral e outro como atrator tipo Rossler (Figura 4). O parâmetro que determina os diferentes atratores é o parâmetro g . Para $g = 0,600$ temos atrator Dupla Espiral, para $g = 0,575$ temos atrator tipo Rossler.

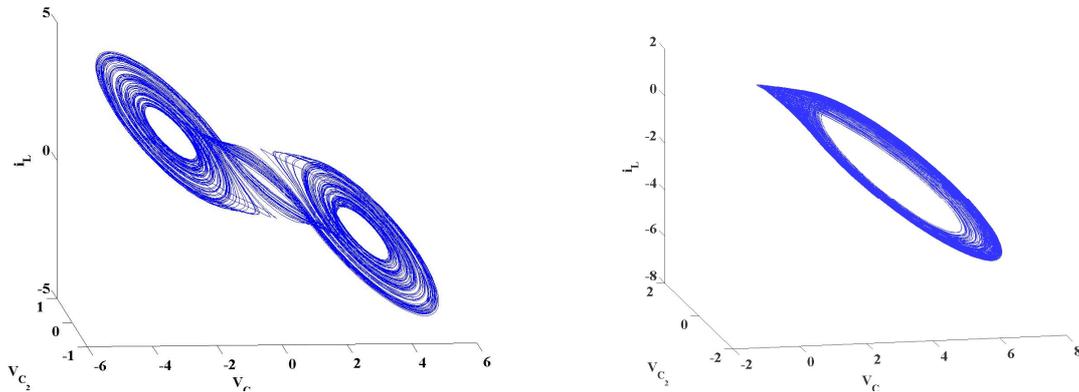


Fig. 4 - Atratores estranhos caóticos, Dupla Espiral ($g = 0,600$) à esquerda e tipo Rossler ($g = 0,575$) à direita.

Bacias de atração

Uma outra característica dos sistemas não lineares é a coexistência de atratores, ou seja, para um mesmo parâmetro do sistema, mas para duas condições iniciais diferentes o sistema pode desenvolver dois comportamentos dinâmicos distintos. O conjunto de condições iniciais que geram um determinado comportamento dinâmico (ou atrator do sistema) é chamado de BACIA DE ATRAÇÃO.

O sistema de Matsumoto-Chua para $g=0,575$ apresenta coexistência de atratores caóticos conforme mostrado na Figura 4 abaixo. Se simularmos um gride de 500 por 500 de condições iniciais e para cada condição verificamos para qual atrator a condição inicial converge podemos construir a bacia de atração deste sistema conforme mostramos na Figura abaixo.

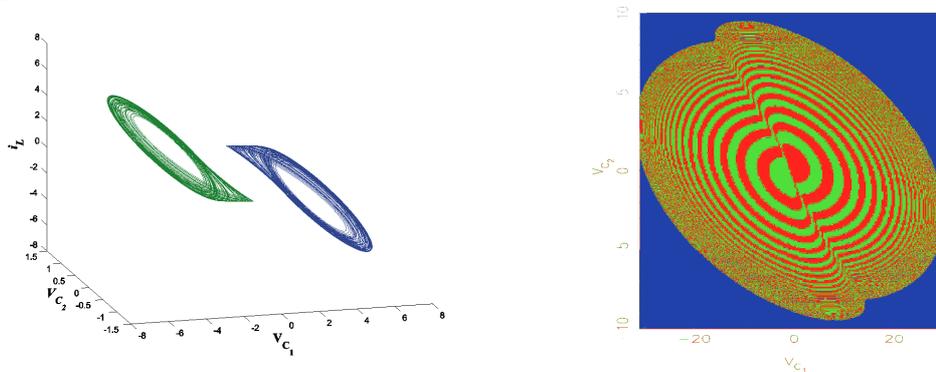


Fig. 5 – Atratores caóticos coexistentes e suas bacias de atração. Cada par de variáveis (V_{C1}, V_{C2}) é uma condição inicial que integrada gera um dos atratores. Cada condição em cima de uma das curvas da bacia gera uma única dinâmica. Condições na parte lisa da bacia não geram dinâmica estável.

Bifurcações

Sistemas não lineares apresentam uma dinâmica rica a partir da variação de um dos seus parâmetros internos, a mudança repentina de comportamento pela variação de um dos parâmetros chamamos de bifurcação e já gerou uma grande teoria chamada teoria das catástrofes.

Lembro de uma experiência em Química que fazíamos titulação de um composto aonde lentamente íamos pingando uma quantidade de acido na solução ate que ela virasse base que notávamos pela súbita mudança de coloração do composto (incolor para vermelho, por exemplo). Comparando com os sistemas dinâmicos não lineares diríamos que neste momento houve uma bifurcação no sistema químico, ou seja, uma alteração brusca no sistema e apresentando uma nova característica.

No geral, sistemas não lineares que desenvolvem caos seguem uma série de seqüências de comportamento até desenvolverem caos denominadas rotas para o caos. Estas rotas seguem uma série de bifurcações em cada mudança de comportamento. O circuito de Matsumoto-Chua, por exemplo, segue a rota para o caos via duplicação de período. Isto significa que o sistema inicialmente tem uma série de comportamentos periódicos que inicia com período 1 e à medida que se aumenta o parâmetro g do sistema, bifurca para uma órbita de período 2, período 4, período 8, período 16, 32, 64, até apresentar um comportamento caótico onde todos os períodos estão presentes, vagando momentaneamente em uma órbita periódica e saltando para outra logo em seguida, assim apresentando um comportamento imprevisível e aleatório. Sua série temporal é uma junção de pedaços de órbitas periódicas que são instáveis no tempo.

Uma maneira de visualizar a série de bifurcações que um sistema tridimensional apresenta é através da seção de Poincaré. A idéia é colocar um plano perpendicular as

trajetórias do atrator e cada vez que o mesmo passar pelo plano é gerado um ponto colorido no mesmo. Assim, vai-se variando o parâmetro do sistema e verificando que tipo de comportamento apresenta neste plano. Se for uma órbita de período-1 irá formar um ponto. Período dois, dois pontos e assim, sucessivamente. Na Figura 6, mostramos o diagrama de bifurcação do circuito de Matsumoto-Chua quando se varia o parâmetro g do sistema. Note que a linha inicial de pontos indica que para este intervalo do parâmetro g teremos órbitas periódicas de período-1. Em seguida há um intervalo de valores que geram período-2, depois período-4, etc, até gerar estado caótico com janelas periódica presentes.

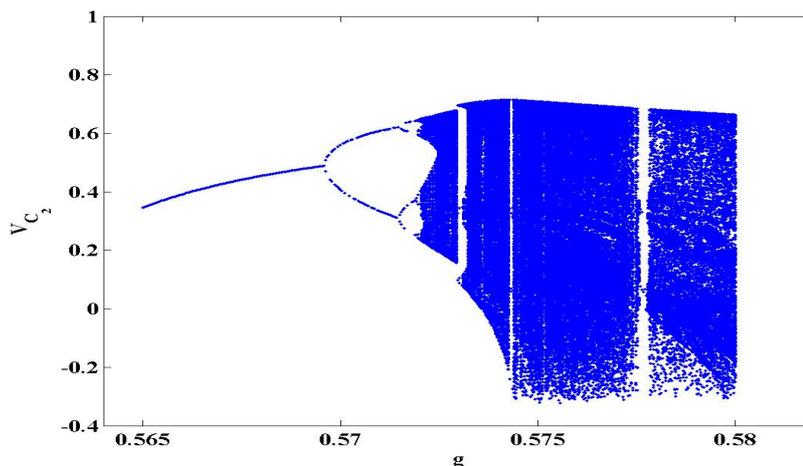


Fig.6 - Diagrama de bifurcação para o Circuito de Matsumoto-Chua. À medida que se varia o parâmetro $g(1/R)$ do circuito ocorre uma série de bifurcações no sistema, indo do comportamento periódico de período-1, período-2, período-4, até desenvolver comportamento caótico com todos os períodos.

Existem bifurcações que alteram a dinâmica do sistema abruptamente. Pequenas alterações no parâmetro do sistema leva a uma dinâmica totalmente diferente, passando de um sistema periódico para um comportamento caótico, por exemplo. Sistemas não lineares podem se comportar por um longo intervalo de parâmetros de uma maneira mais simples e previsível, mas por uma mudança repentina de um único parâmetro tornar o sistema instável com um comportamento totalmente novo. O sistema não é destruído, mas tem uma nova dinâmica e novas propriedades e algumas vezes sem possibilidade de retorno ao comportamento original.

O efeito borboleta

Uma das principais características reais dos sistemas caóticos é sua dependência extrema quanto às condições iniciais, conhecido comumente como **efeito borboleta**. Este nome vem da visão extrema e exagerada usada na previsão climática, pois se o clima é um sistema dinâmico não linear e caótico, cujas componentes estão intrinsecamente ligadas, qualquer alteração neste sistema, por menor que seja, alterará a dinâmica do

sistema como um todo. Dai diz-se que se uma borboleta bater as asas na Amazônia poderá provocar com esta leve perturbação de suas asas um tufão na Ásia.

Exageros a parte, vamos exemplificar com o circuito de Matsumoto-Chua esta propriedade dos sistemas caóticos. Usando este sistema no estado Caótico de Dupla Espiral ($g = 0,600$), integramos o sistema com as seguintes condições iniciais das suas variáveis: $V_{C1} = 0,290$; $V_{C2} = 0,2000$; $i_L = 0,230$, gravamos as séries temporais geradas pelo sistema. Em seguida, integramos novamente o sistema fazendo uma pequena modificação na condição inicial, por exemplo, uma perturbação na milésima casa decimal ($V_{C2} = 0,200005$). No gráfico abaixo (Figura 7), mostramos as duas séries temporais da variável V_{C1} , poderíamos usar outras variáveis para obter o mesmo efeito. Note que inicialmente não percebemos a diferença nas duas séries temporais geradas, porém depois de um breve tempo não há mais correlação das séries temporais, ou seja, o sistema segue diferentes comportamentos para uma pequena alteração na condição inicial de uma de suas variáveis. Apesar do sistema ser determinístico (cada condição inicial gera uma única dinâmica), pequenas perturbações ou flutuações nas condições iniciais levam a alterar sua dinâmica completamente, dando imprevisibilidade ao sistema.

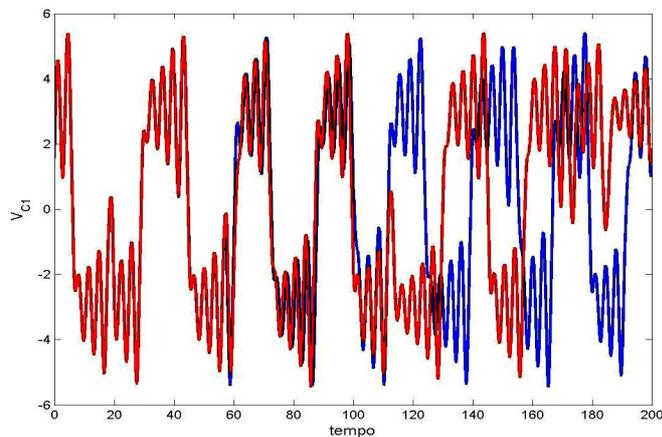


Fig.7 - Efeito Borboleta. Séries temporais obtidas para o sistema com uma condição inicial levemente alterada em apenas uma variável do sistema ($V_{C2} = 0,200005$).

Atrator de Lorenz: a essência da caoticidade da previsão atmosférica

A. Lorenz foi um meteorologista do MIT que tentou equacionar e modelar a dinâmica atmosférica objetivando prever o clima. Sua tentativa inicial envolvia um conjunto de muitas equações acopladas tentando colocar todas as dependências possíveis das variáveis envolvidas para refletir com fidelidade a realidade do tempo atmosférico.

Como um investigador astuto Lorenz percebeu que o número de variáveis envolvidas não era a característica primordial que tornava a previsão do tempo impossível, embora fosse um fator relevante para tornar o problema difícil do ponto de vista matemático. Lorenz então fez o que os Físicos fazem para entender um determinado fenômeno na natureza, simplificou ao máximo o fenômeno atmosférico através de um modelo simples, mas que deixasse explicitamente os fatores relevantes que são

responsáveis pelo fenômeno da imprevisibilidade observada. Este modelo é colocado abaixo:

Sistema de Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} = -10(x - y);$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz; \quad r = 28.0$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z.$$

O modelo de Lorenz depende de três variáveis apenas, estas estão intrinsecamente ligadas, gerando um sistema de equações diferenciais não lineares, cuja a integração numérica das mesmas gera um atrator estranho e caótico tridimensional conhecido como atrator de Lorenz (mostrado o atrator em 3D nas variáveis X, Y e Z, na Figura 8), que coincidentemente tem a forma de uma borboleta o que passou a difundir o efeito borboleta que já explicamos anteriormente.

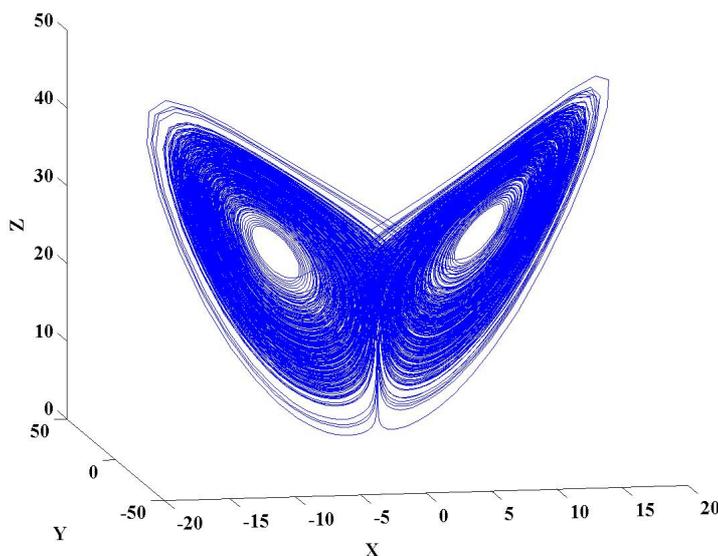


Fig. 8 - Atrator de Lorenz. Atrator estranho caótico tridimensional nas variáveis X, Y e Z.

O fator relevante deixado por Lorenz nas equações era justamente a não linearidade presente nas equações através dos termos cruzados (xz e xy) e o acoplamento destas variáveis. Imaginemos, simplificadamente, que as três variáveis (x,y,z) representem a temperatura, a umidade e a pressão, respectivamente e que o sistema de equações modele a dinâmica das mesmas no tempo. Vê-se então que a dinâmica é complexa e caótica e, portanto, qualquer alteração em umas das variáveis, por menor que seja, provocará uma mudança drástica na dinâmica do sistema como um todo. Embora o sistema de Lorenz seja determinístico, ou seja, cada condição inicial gera uma única

solução para o sistema, é impossível prevê a dinâmica futura do sistema em um intervalo curto de tempo. Se colocarmos duas condições iniciais muito próximas e integramos o sistema em um breve intervalo de tempo elas irão evoluir dentro do atrator de forma totalmente diferente, afastando-se exponencialmente com o passar do tempo.

O fato de o sistema ser determinístico exige que o espaço mínimo para que se desenvolva caos seja tridimensional. Uma trajetória não pode se cruzar, o cruzamento implicaria que não seria determinístico, pois para uma única condição inicial teríamos dois futuros distintos, o que não ocorre. Este cruzamento ocorreria fatalmente num plano (os Matemáticos demonstram esta propriedade das equações diferenciais com princípio da unicidade da condição inicial). Porém o sistema continua evoluindo no tempo e ocupa uma região restrita do espaço. Para isso, dobra-se e contorce-se, criando uma figura maior que o plano, porém menor que o espaço tridimensional, ou uma figura fractal com dimensão fracionada. Se preenchesse um cubo teria dimensão três, se preenchesse um plano teria dimensão dois, porém fica no meio dessas dimensões, sua dimensão é 2,8.

Quem já não ficou fascinado ao observar as estruturas das nuvens e suas multiformas e vislumbrar seres e objetos que lentamente se desfazem numa dança por vezes lenta e por vezes turbulenta. As nuvens são estruturas de cristais de gelo que surgem pela junção de um conjunto de fatores atmosféricos. Suas formas e propriedades vão depender das características particulares que eles fatores se associam. Assim, as nuvens formadas e suas diferentes formas são um belo exemplo de estruturas emergentes. Vapores de água, sob condições de temperatura, pressão, presença de pequenas partículas que permitam a agregação desses vapores, chamados Núcleos de Condensação de Nuvens (NCN), ventos, umidade, processos físico-químicos intrincados que levam a formação de uma estrutura nova, com propriedades físico-química distintas do vapor d'água.

A presença de nuvens numa região altera completamente a dinâmica local do tempo atmosférico. Dias claros, sem nuvens no céu permitem que mais radiação solar chegue até o solo, enquanto dias nublados com grande presença de nuvens fazem com que a radiação vinda do sol seja refletida ao espaço, propiciando menos calor que chegue ao solo. A dinâmica de formação e presença de nuvens em uma região é uma das tarefas e complexidade para a previsão do tempo. Imagine então a complexidade da modelagem climatológica quanto se leva em consideração todos os compartimentos responsáveis pela dinâmica climática que se interligam de forma não linear.

UFPA
*II Semana de Pós-Graduação
em Física*

Introdução à Teoria do Caos
Prof. Dr. Elinei Santos

Belém - 2007

Elinei Pinto dos Santos
elinei@ufpa.br

Msc. em Geofísica - UFPA

Dr. em Física (Dinâmica não linear)- IF.USP

Vice-Coordenador do Programa de
Pós-Graduação em Física da UFPA

Introdução à teoria do Caos

Não nos perguntamos qual o propósito útil dos pássaros cantarem, pois o canto é o seu prazer, uma vez que foram criados para cantar. Similarmente, não devemos perguntar por que a mente humana se inquieta com a extensão dos segredos dos céus....A diversidade do fenômeno da Natureza é tão vasta e os tesouros escondidos nos céus tão ricos, precisamente para que a mente humana nunca tenha falta de alimento

Johannes Kepler, *Mysterium Cosmographicum*.

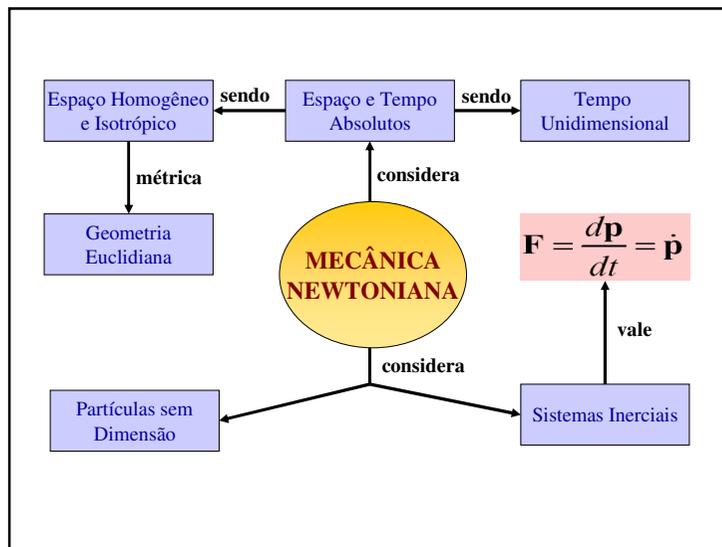
Introdução à teoria do caos

I-Caos – Aspectos histórico

1666- Newton – invenção do cálculo, equações diferenciais, explicação do movimento planetário

- Leis de Kepler
- Explicação das marés
- Determinação teórica de planeta

Introdução à teoria do caos



I-Caos – Aspectos histórico

1800-1890- Poincaré – Vislumbre do caos
 -Estudo analítico do movimento planetário
 -Abordagem geométrica, pegadas do caos

1920-1960- Birkhoff, Kolmogorov, Arnold, Moser
 - Comportamento complexo em sistema Hamiltonianos (Teorema KAM).

1963- Lorenz – Atrator estranho em um modelo simples de convecção.

Introdução à teoria do caos

I-Caos – Aspectos histórico

1970- Ruelle e Takens – Turbulência e caos
 -May – Caos em mapa logístico
 -Feigenbaum – Universalidade e renormalização, conexão entre caos e transição de fase
 -Winfree – Oscilação não linear em Biologia
 -Mandelbrot – Geometria Fractal

1980- Grebogi, Yorke, Ott – controle de caos
 - Pecora e Carroll – sincronização do caos

Introdução à teoria do caos

Demônio de Laplace

Determinismo científico de Laplace

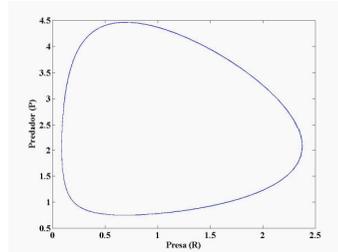
“Podemos considerar o estado presente do universo como o efeito de seu passado e a causa de seu futuro. Um intelecto que em dado momento conhecesse todas as forças que animam a natureza e a posição mútua dos seres vivos que a compõem, se este intelecto fosse vasto o suficiente para submeter os dados a análise, poderia condensar em uma única fórmula o movimento dos maiores corpos do universo e aqueles dos menores átomos; para tal intelecto nada poderia ser incerto e o futuro, assim como o passado estaria presente diante de seus olhos” - Marquis Pierre Simon de Laplace (1749-1827)-Ensaio filosófico sobre Probabilidades

Introdução à teoria do caos

Modelos Motivadores Modelo Predador - Presa

$$\frac{dP}{dt} = cPR - aP$$

$$\frac{dR}{dt} = bR - dPR$$



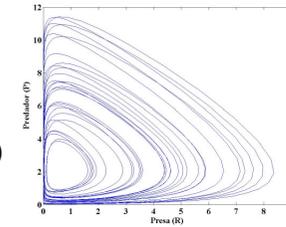
Ciclo Limite: Sistema auto-regulador

Introdução à teoria do caos

Modelo Predador – Presa com variação sazonal

$$\frac{dP}{dt} = cPR - aP$$

$$\frac{dR}{dt} = bR - dPR + A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$



Comportamento caótico

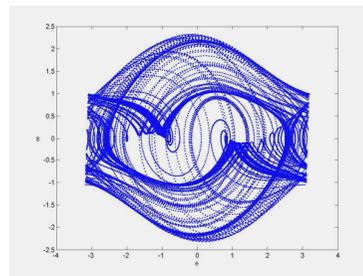
Introdução à teoria do caos

Modelos Motivadores-Pêndulo simples forçado

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\omega}{q} - \operatorname{sen}\theta + g \cos\phi$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

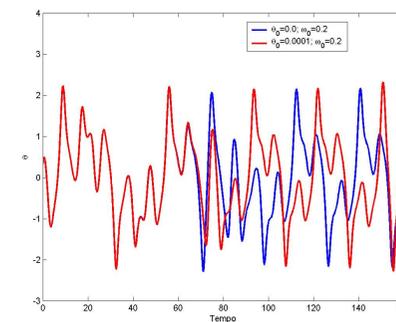
$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_d$$



Atrator caótico do Pêndulo forçado

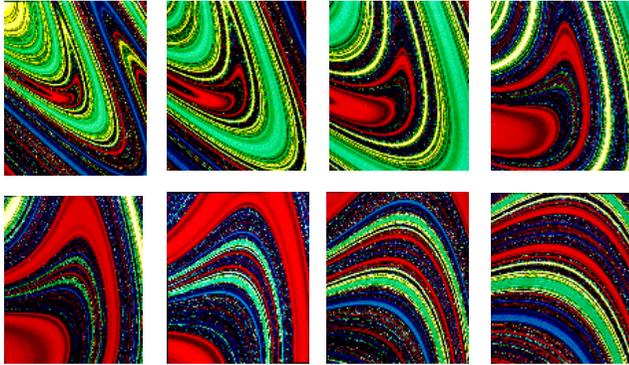
Introdução à teoria do caos

Pêndulo simples forçado – efeito borboleta (dependência sensível às condições iniciais)



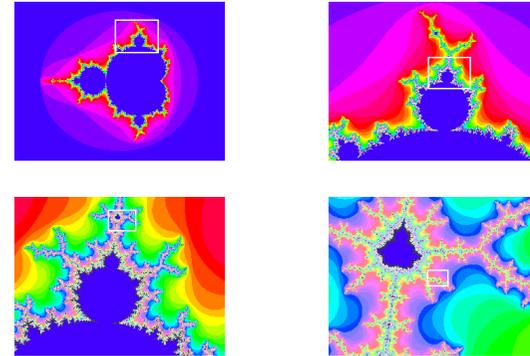
Introdução à teoria do Caos

Bacia de atração -Pêndulo simples forçado (estrutura fractal)



Introdução à teoria do Caos

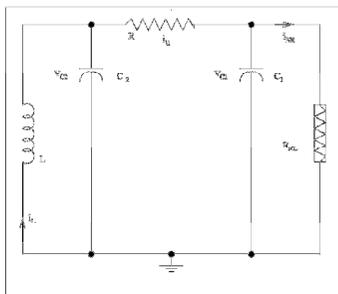
A geometria fractal



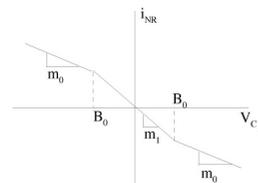
Introdução à teoria do caos

Modelo de Matsumoto-Chua

Circuito elétrico



Curva característica



Introdução à teoria do caos

Modelo de Matsumoto-Chua

$$C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = g(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}),$$

$$C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L,$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -V_{C_2},$$

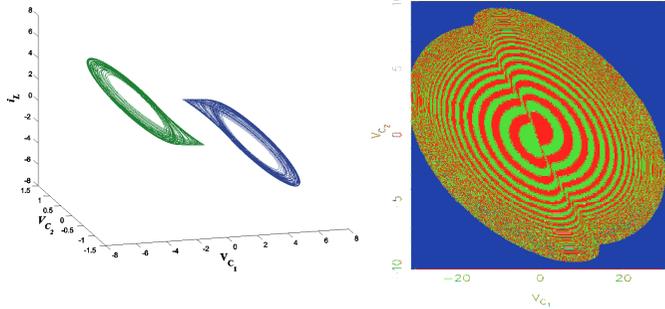
$$i_{NR}(V_{C_1}) = m_0 V_{C_1} + 0,5(m_1 - m_0) + (|V_{C_1} + B_p|) + (|V_{C_1} - B_p|).$$

Introdução à teoria do caos

Modelo de Matsumoto-Chua

Atratores do tipo Rössler

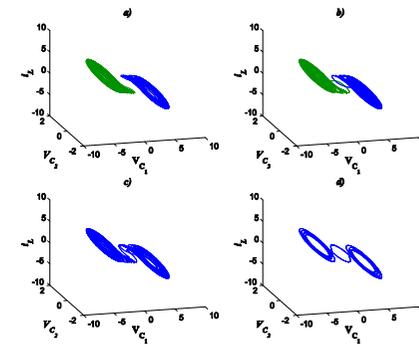
Bacia de atração



Introdução à teoria do caos

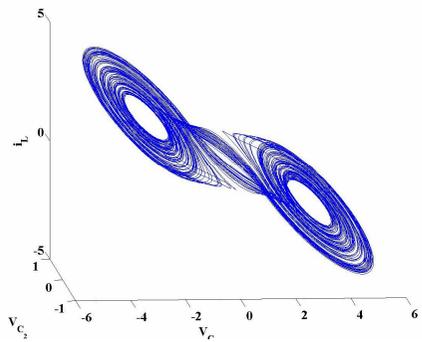
Modelo de Matsumoto-Chua

Crise de fronteira – colisão de atratores



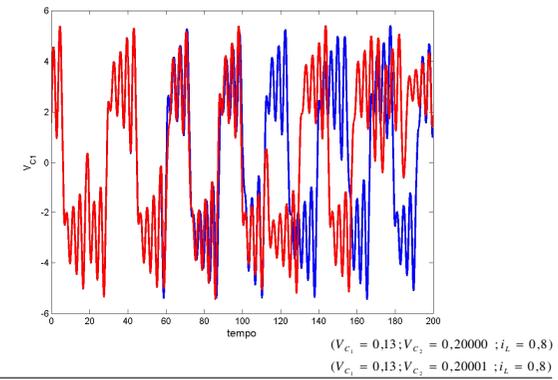
Introdução à teoria do caos

Atrator caótico Dupla-Espiral



Introdução à teoria do caos

Dependência às condições iniciais



Introdução à teoria do caos

Sistema de Lorenz

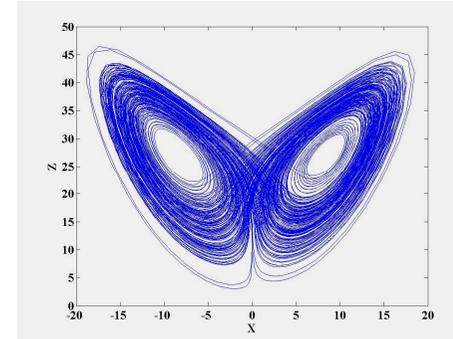
$$\frac{dx}{dt} = -10(x - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz \quad r = 28.0$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z$$

Introdução à teoria do caos

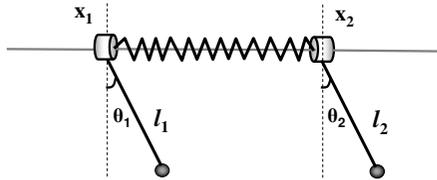
Sistema de Lorenz



Introdução à teoria do caos

Sistema Massa-mola-Pêndulo

Colaboração: Dra. Silvana Perez e Debora Rodrigues



$$L = m \sum_{i=1}^2 \left[\dot{x}_i^2 + \dot{x}_i l_i \dot{\theta}_i \cos \theta_i + \frac{l_i^2 \dot{\theta}_i^2}{2} + g l_i \cos \theta_i \right] - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2 - l_0)^2$$

Trabalho apresentado no Encontro de Físicos do Norte e Nordeste - 2007

Introdução à teoria do caos

Sistema Massa-mola-Pêndulo

Colaboração: Dra. Silvana Perez e Debora Rodrigues

Caso dissipativo com forçamento do tipo $F(t) = \epsilon \cos(\omega t)$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2} \frac{k}{m} (x_1 - x_2 - l_0) + \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \frac{b}{2m} \dot{x}_1$$

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{\dot{x}_1}{l_1} \cos \theta_1 - \frac{g}{l_1} \sin \theta_1 - \frac{b}{l_1 m} \dot{\theta}_1 + \frac{\epsilon}{l_1 m} \cos(\omega t)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{m} (x_1 - x_2 - l_0) + \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \frac{b}{2m} \dot{x}_2$$

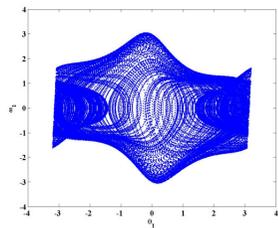
$$\dot{\theta}_2 = -\frac{\dot{x}_2}{l_2} \cos \theta_2 - \frac{g}{l_2} \sin \theta_2 - \frac{b}{l_2 m} \dot{\theta}_2$$

Introdução à teoria do caos

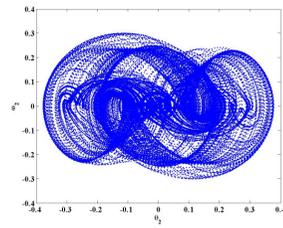
Sistema Massa-mola-Pêndulo

Colaboração: Dra. Silvana Perez e Debora Rodrigues

Atrator caótico do primeiro pêndulo



Atrator caótico do segundo pêndulo

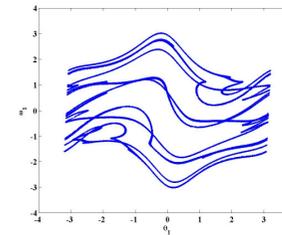


Introdução à teoria do caos

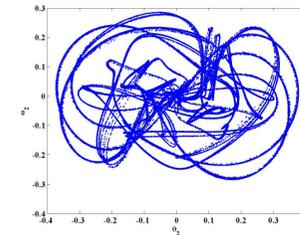
Sistema Massa-mola-Pêndulo

Colaboração: Dra. Silvana Perez e Debora Rodrigues

Mapa de Poincaré do primeiro atrator



Mapa de Poincaré do segundo atrator



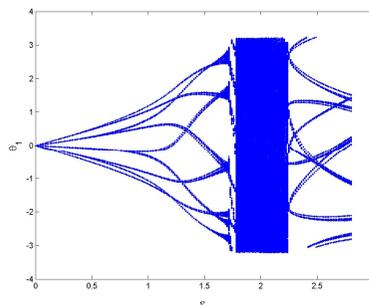
Mapa estroboscópico do sistema dinâmico. A dinâmica do sistema é registrada a cada período T do forçamento externo.

Introdução à teoria do caos

Sistema Massa-mola-Pêndulo

Colaboração: Dra. Silvana Perez e Debora Rodrigues

Diagrama de bifurcação do sistema em função da variação da amplitude de forçamento



Introdução à teoria do caos

Sistema discreto – mapa dissipativo (elinei)

colaboração: Dr. Iberê Caldas (IF.USP)

$$p_{n+1} = \frac{1}{(1 + \gamma)} \left[p_n + \omega_n^2 \text{sen}(\theta_n) \cos(\theta_n) - K \text{sen}(\theta_n) \right]$$

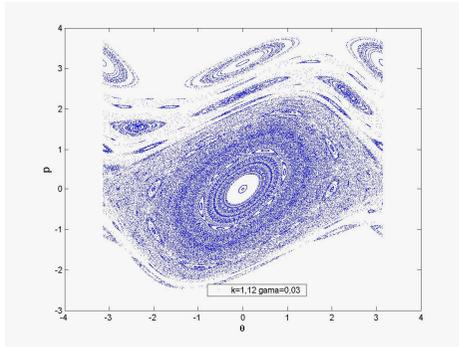
$$\theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1}$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + c (\cos(\theta_n) - \cos(\theta_0)) \Delta t$$

γ - fator de dissipação e $c < 1$

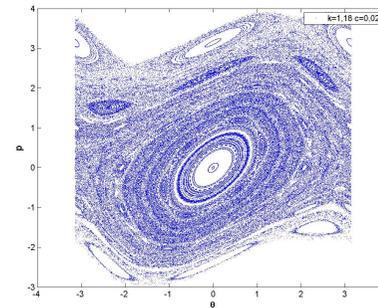
Introdução à teoria do caos

Sistema discreto – mapa dissipativo (elinei)



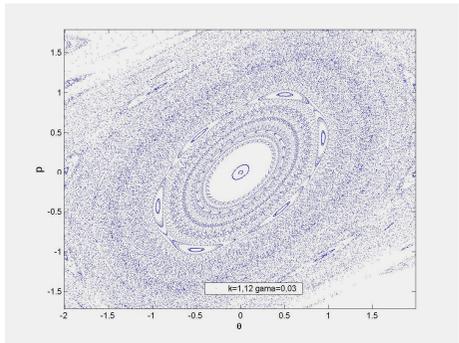
Introdução à teoria do caos

Sistema discreto – mapa dissipativo (elinei)



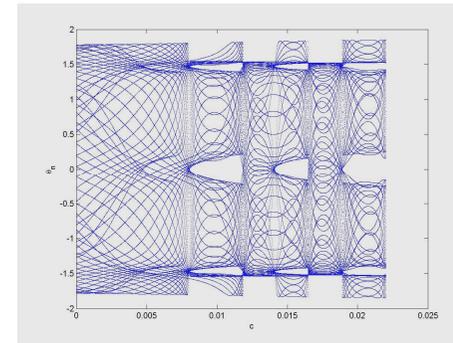
Introdução à teoria do caos

Sistema discreto – mapa dissipativo (elinei)



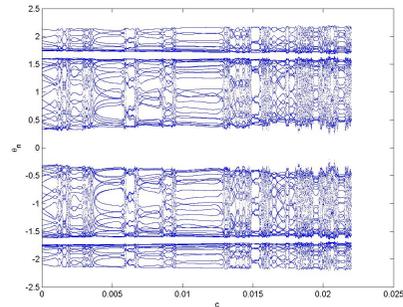
Introdução à teoria do caos

Diagrama de bifurcação– mapa dissipativo (elinei)



Introdução à teoria do caos

Diagrama de bifurcação– mapa dissipativo (elinei)



Introdução à teoria do caos

A teoria do Caos

Sistemas simples possuem comportamento complexo

Dependência hipersensível às condições iniciais

Imprevisibilidade

Estrutura geométrica subjacente

Introdução à teoria do caos

Bibliografia

1. Elinei Santos. *Bifurcações, Controle e Sincronização do Caos nos Circuitos de Matsumoto-Chua*. Tese de doutorado, IF.USP, 2001.
 2. Lui Lam. *Nonlinear Physics for Beginners*. World Scientific, Singapore, 1998.
 3. Luiz Henrique Alves Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. Livraria da Física, São Paulo, 2006.
 4. J. Guckenheimer e P. Holmes. *Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 1983.
 5. Morris W. Hirsch, Stephen Smale e Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*, 2 Ed. Elsevier Academic Press, New York, 2004.
-

Introdução à teoria do caos